CORRECTION DU CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES

Inéquations, factorisation et modélisation

Exercice 1 – Étude de signes (4 points)

1. $(2x-5)(3x+2) \geq 0$
On résout : $2x-5=0 \iff x=\frac{5}{2}$ et $3x+2=0 \iff x=-\frac{2}{3}$.

x	$-\infty$		$-2/3$		$5/2$		$+\infty$
$2x-5$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(2x-5)(3x+2)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

$S = \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$.

2. $-2x(x+7) < 0$
On résout : $-2x=0 \iff x=0$ et $x+7=0 \iff x=-7$.

x	$-\infty$		-7		0		$+\infty$
$-2x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x+7$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$-2x(x+7)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

$S =]-\infty; -7[\cup]0; +\infty[$.

3. $(1-4x)(x-1) \leq 0$
On résout : $1-4x=0 \iff x=\frac{1}{4}$ et $x-1=0 \iff x=1$.

x	$-\infty$		$1/4$		1		$+\infty$
$1-4x$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(1-4x)(x-1)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

$S = \left]-\infty; \frac{1}{4}\right] \cup [1; +\infty[$.

4. $x^2(5-x) > 0$
On résout : $x^2=0 \iff x=0$ et $5-x=0 \iff x=5$.

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$5-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x^2(5-x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

$S =]-\infty; 0[\cup]0; 5[$.

Exercice 2 – Factorisation et Inéquations (5 points)

1. $(x+1)(2x-3) + (x+1)^2 \leq 0$
$\iff (x+1)[(2x-3)+(x+1)] \leq 0 \iff (x+1)(3x-2) \leq 0$.
On résout : $x+1=0 \iff x=-1$ et $3x-2=0 \iff x=\frac{2}{3}$.

x	$-\infty$		-1		$2/3$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$3x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(x+1)(3x-2)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

$S = \left[-1; \frac{2}{3}\right]$.

2. $4x^2 - 49 > 0$
$\iff (2x-7)(2x+7) > 0$.
On résout : $2x - 7 = 0 \iff x = \frac{7}{2}$ et $2x + 7 = 0 \iff x = -\frac{7}{2}$.

x	$-\infty$		$-7/2$		$7/2$		$+\infty$
$2x-7$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$2x+7$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(2x-7)(2x+7)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

$S = \left]-\infty; -\frac{7}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{2}; +\infty\right[$.

3. $(x-5)(2x+1) \leq x^2 - 25$
$\iff (x-5)(2x+1) - (x-5)(x+5) \leq 0 \iff (x-5)[(2x+1) - (x+5)] \leq 0 \iff (x-5)(x-4) \leq 0$.
On résout : $x - 5 = 0 \iff x = 5$ et $x - 4 = 0 \iff x = 4$.

x	$-\infty$		4		5		$+\infty$
$x-5$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x-4$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-5)(x-4)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

$S = [4; 5]$.

4. $9(x-1)^2 - 4 < 0$
$\iff [3(x-1) - 2][3(x-1) + 2] < 0 \iff (3x-5)(3x-1) < 0$.
On résout : $3x - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{3}$ et $3x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$.

x	$-\infty$		$1/3$		$5/3$		$+\infty$
$3x-5$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$3x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(3x-5)(3x-1)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

$S = \left]\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right[$.

Exercice 3 – Quotients (5 points)

1. $\dfrac{5-x}{2x+4} \geq 0$
V.I. : $2x + 4 = 0 \iff x = -2$. On résout : $5 - x = 0 \iff x = 5$.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$5-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$2x+4$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\frac{5-x}{2x+4}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

$S =]-2; 5]$.

2. $\dfrac{x^2 - 16}{2x+8} < 0$
V.I. : $x = -4$. Pour $x \neq -4$: $\frac{(x-4)(x+4)}{2(x+4)} < 0 \iff \frac{x-4}{2} < 0$. On résout : $x - 4 = 0 \iff x = 4$.

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\frac{x^2-16}{2x+8}$		$-$	$\Vert$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

$S =]-\infty; -4[\cup]-4; 4[$.

3. $\dfrac{3}{x-2} \leq 1$

$\iff \frac{3-(x-2)}{x-2} \leq 0 \iff \frac{5-x}{x-2} \leq 0$.

V.I. : $x = 2$. On résout : $5 - x = 0 \iff x = 5$.

x	$-\infty$ $\quad$ 2 $\quad$ 5 $\quad$ $+\infty$
$5-x$	$+$ $\mid$ $+$ 0 $-$
$x-2$	$-$ 0 $+$ $\mid$ $+$
$\frac{5-x}{x-2}$	$-$ $\|$ $+$ $\mathbf{0}$ $-$

$S =]-\infty; 2[\cup [5; +\infty[$.

4. $\dfrac{1}{x+1} > \dfrac{1}{x-1}$

$\iff \frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} > 0 \iff \frac{-2}{(x+1)(x-1)} > 0$. V.I. : $x = -1$ et $x = 1$.

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
-2	$-$ $\mid$ $-$ $\mid$ $-$
$(x+1)(x-1)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$
$\frac{-2}{(x+1)(x-1)}$	$-$ $\|$ $+$ $\|$ $-$

$S =]-1; 1[$.

Exercice 4 – Situation réelle (6 points)

1. $x \in [0; 10[$.
2. $S(x) = (20 - 2x)(30 - 2x)$.
3. $S(x) = 4x^2 - 100x + 600$.
4. **Contrainte 416** cm^2 :
   (a) $S(x) \geq 416 \iff 4x^2 - 100x + 184 \geq 0$.
   (b) $4(x-2)(x-23) = 4x^2 - 100x + 184$.
   (c) Étude du signe de $4(x-2)(x-23)$ sur $[0; 10]$:

x	0 $\quad$ 2 $\quad$ 10
$x-2$	$-$ 0 $+$
$x-23$	$-$ $\mid$ $-$
$4(x-2)(x-23)$	$+$ $\mathbf{0}$ $-$

L'aire est supérieure à 416 cm^2 quand $x \in [0; 2]$. La largeur maximale est donc **2 cm**.