

CORRECTION DU CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES

Inéquations algébriques et fonctions affines – Classe de Seconde

Exercice 1 – Inéquations simples (6 points)

Pour chaque inéquation produit, on identifie les racines de chaque facteur, on dresse le tableau de signes, puis on conclut.

1. $(x - 3)(x + 5) \leq 0$

On résout : $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ et $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$x - 3$			-		-	0	+
$x + 5$			-	0	+		+
$(x - 3)(x + 5)$			+	0	-	0	+

Le produit est négatif ou nul **entre** les deux racines (incluses car \leq).

$$\mathcal{S} = [-5; 3]$$

2. $x(x - 4) \geq 0$

On résout : $x = 0$ et $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x			-	0	+		+
$x - 4$			-		-	0	+
$x(x - 4)$			+	0	-	0	+

Le produit est positif ou nul **à l'extérieur** des deux racines (incluses car \geq).

$$\mathcal{S} =]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$$

3. $(2x + 1)(3 - x) > 0$

On résout : $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ et $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$2x + 1$		- 0 +		+
$3 - x$		+ +	0	-
$(2x + 1)(3 - x)$		- 0 +	0	-

Le produit est strictement positif **entre** les deux racines (exclues car $>$).

$$\mathcal{S} = \left] -\frac{1}{2}; 3 \right[$$

Exercice 2 – Inéquations nécessitant une factorisation (4 points)

1. $x(x - 3) + 2x - 6 \geq 0$

On factorise le membre gauche en remarquant le facteur commun $(x - 3)$:

$$x(x - 3) + 2x - 6 = x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(x + 2).$$

L'inéquation devient : $(x - 3)(x + 2) \geq 0$.

On résout : $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ et $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x + 2$		- 0 +		+
$x - 3$		- -	0	+
$(x - 3)(x + 2)$		+ 0 -	0	+

$$\mathcal{S} =] -\infty; -2] \cup [3; +\infty[$$

2. $(6 - 3x)(x + 3) \geq (x + 3)(2 - x)$

On ramène tout au membre gauche :

$$(6 - 3x)(x + 3) - (x + 3)(2 - x) \geq 0.$$

On factorise par $(x + 3)$:

$$(x + 3)[(6 - 3x) - (2 - x)] \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(4 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(x + 3)(2 - x) \geq 0.$$

Le facteur $2 > 0$ ne change pas le sens de l'inégalité : $(x + 3)(2 - x) \geq 0$.

On résout : $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ et $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x + 3$		- 0 +		+
$2 - x$		+ +	0	-
$(x + 3)(2 - x)$		- 0 +	0	-

$$\mathcal{S} = [-3; 2]$$

Exercice 3 – Inéquations avec quotient (5 points)

Méthode : On ne multiplie jamais par le dénominateur. On ramène tout au même membre, on forme une fraction unique, puis on étudie le signe en excluant la valeur interdite (V.I.).

1. $\frac{2x + 5}{-x + 1} \leq 1$

Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On ramène au même membre :

$$\frac{2x + 5}{-x + 1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x + 5) - (-x + 1)}{-x + 1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x + 4}{-x + 1} \leq 0.$$

On résout : $3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$ et $-x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	1	$+\infty$
$3x + 4$		- 0 +	+	
$-x + 1$		+ +	0 -	
$\frac{3x + 4}{-x + 1}$		- 0 +	-	

La fraction est négative ou nulle sur $\left] -\infty; -\frac{4}{3} \right]$ et sur $]1; +\infty[$.

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{4}{3} \right] \cup]1; +\infty[$$

2. $\frac{x^2 - 9}{2x - 4} > 0$

Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. On factorise le numérateur (identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$) :

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

L'inéquation devient : $\frac{(x - 3)(x + 3)}{2(x - 2)} > 0$. Le facteur $2 > 0$ est sans effet sur le signe.

On résout : $x = -3$, $x = 3$ et $2(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

x	$-\infty$	-3	2	3	$+\infty$
$x + 3$		- 0 +	+	+	
$x - 2$		- -	0 +	+	
$x - 3$		- -	-	0 +	
$\frac{(x - 3)(x + 3)}{2(x - 2)}$		- 0 +	-	0 +	

La fraction est strictement positive sur $] -3; 2[$ et $]3; +\infty[$.

$$\mathcal{S} =] -3; 2[\cup]3; +\infty[$$

Exercice 4 – Situation réelle (5 points)

1. Aire initiale du terrain

$$A_{\text{initiale}} = 100 \times 80 = \boxed{8\,000 \text{ m}^2}$$

2. Expression de la nouvelle aire $A(x)$

Après modification, la longueur vaut $(100 - x)$ m et la largeur $(80 + x)$ m. On développe :

$$\begin{aligned} A(x) &= (100 - x)(80 + x) \\ &= 8\,000 + 100x - 80x - x^2 \\ &= \boxed{-x^2 + 20x + 8\,000.} \end{aligned}$$

3. Mise en place de l'inéquation

On cherche quand la nouvelle aire est **strictement supérieure** à l'aire initiale :

$$A(x) > 8\,000 \Leftrightarrow -x^2 + 20x + 8\,000 > 8\,000 \Leftrightarrow \boxed{-x^2 + 20x > 0.} \quad \square$$

4. Résolution et conclusion

On factorise :

$$-x^2 + 20x = -x(x - 20) = x(20 - x).$$

L'inéquation devient : $x(20 - x) > 0$.

On résout : $x = 0$ et $20 - x = 0 \Leftrightarrow x = 20$.

x	0	0	20	100	
x	-	0	+		+
$20 - x$	+		+	0	-
$x(20 - x)$	-	0	+	0	-

$$\mathcal{S} =]0; 20[$$

Conclusion : L'aire du terrain modifié est supérieure à l'aire initiale pour tout $x \in]0; 20[$. Autrement dit, toute réduction de la longueur comprise entre 0 et 20 m (exclusive) augmente l'aire du terrain.

Fin de la correction