

CORRECTION DU CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES

Vecteurs dans le repère – Classe de Seconde

Rappels de cours utilisés dans cette correction

Soit un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et deux points $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$.

Coordonnées d'un vecteur : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Combinaison linéaire : Si $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \begin{pmatrix} \lambda a + \mu c \\ \lambda b + \mu d \end{pmatrix}$

Milieu : Le milieu M de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

Distance : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Colinéarité – Déterminant : $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc = 0$.

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ pour tous points A, B, C .

Exercice 1 – Coordonnées d'un vecteur et opérations (6 points)

On rappelle les points : $A(1; 3)$, $B(5; -1)$, $C(-2; 4)$, $D(3; 6)$.

1. Coordonnées de \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{CD}

Pour tout vecteur \overrightarrow{XY} , on soustrait les coordonnées du point de départ à celles du point d'arrivée.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 1 \\ 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-2) \\ 6 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Coordonnées de $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

On applique les opérations coordonnées par coordonnées :

$$\vec{u} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-5 \\ -8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

3. Écriture de $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de \vec{i} et \vec{j}

Tout vecteur du plan se décompose de manière unique sur la base (\vec{i}, \vec{j}) :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{v} = -3\vec{i} + 5\vec{j}.$$

4. Vérification de la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

On calcule d'abord les vecteurs manquants :

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 5-(-2) \\ -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Membre gauche :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Membre droit :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Les deux membres sont égaux. On peut aussi justifier par Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

et

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \vec{0}. \quad \square$$

Exercice 2 – Milieu d'un segment et distance entre deux points (5 points)

On rappelle les points : $P(-4; 2)$, $Q(6; -2)$, $R(1; 5)$.

1. Milieu M de $[PQ]$

$$M = \left(\frac{x_P + x_Q}{2}; \frac{y_P + y_Q}{2} \right) = \left(\frac{-4 + 6}{2}; \frac{2 + (-2)}{2} \right) = \left(\frac{2}{2}; \frac{0}{2} \right).$$

$$M(1; 0).$$

2. Distance PQ

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{(6 - (-4))^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{10^2 + (-4)^2} = \sqrt{100 + 16} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

$$PQ = 2\sqrt{29} \approx 10,77.$$

3. Distances PR et QR

$$PR = \sqrt{(1 - (-4))^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}.$$

$$QR = \sqrt{(1 - 6)^2 + (5 - (-2))^2} = \sqrt{(-5)^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}.$$

$$PR = \sqrt{34} \approx 5,83 \quad \text{et} \quad QR = \sqrt{74} \approx 8,60.$$

4. Le triangle PQR est-il isocèle ?

On compare les trois distances :

$$PQ = 2\sqrt{29} = \sqrt{116}, \quad PR = \sqrt{34}, \quad QR = \sqrt{74}.$$

Ces trois valeurs sont distinctes : $\sqrt{34} \neq \sqrt{74} \neq \sqrt{116}$.

Aucun des côtés n'est égal à un autre, donc le triangle PQR n'est pas isocèle.

5. Point S tel que $PQSR$ soit un parallélogramme

$PQSR$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales $[PS]$ et $[QR]$ ont le même milieu.

Le milieu de $[QR]$ est :

$$N = \left(\frac{6 + 1}{2}; \frac{-2 + 5}{2} \right) = \left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2} \right).$$

Pour que le milieu de $[PS]$ soit aussi N , on écrit :

$$\frac{x_P + x_S}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x_S = 7 - x_P = 7 - (-4) = 11,$$

$$\frac{y_P + y_S}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y_S = 3 - y_P = 3 - 2 = 1.$$

Vérification par vecteurs : $PQSR$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} 1-11 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Attention : $PQSR$ impose $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{RQ}$.

$$\overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ -2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 11-(-4) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs ne sont pas égaux, ce qui signifie que $PQSR$ dans cet ordre n'est pas un parallélogramme classique. Résolvons correctement :

$PQSR$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ (côtés opposés PQ et RS égaux).

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} x_R + 10 \\ y_R - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 10 \\ 5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$S(11; 1)$.

Exercice 3 – Colinéarité et déterminant (5 points)

1. Vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

a. Calcul du déterminant de (\vec{u}, \vec{v})

Le déterminant de deux vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ est le scalaire $ad - bc$.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - (-6) \times (-2) = 12 - 12 = 0.$$

b. Conclusion sur la colinéarité

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, donc \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

On peut vérifier : $\vec{v} = -2\vec{u}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Points $E(2; 1)$, $F(5; 4)$, $G(8; 7)$

a. Coordonnées de \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{EG}

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b. Déterminant de $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG})$

$$\det(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times 6 - 6 \times 3 = 18 - 18 = 0.$$

c. Conclusion sur l'alignement

Trois points E, F, G sont alignés si et seulement si \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{EG} sont colinéaires, c'est-à-dire si $\det(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}) = 0$.

$\det(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}) = 0$, donc \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{EG} sont colinéaires.

Les points E, F et G sont alignés.

On vérifie : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF}$.

3. Valeur de k pour que $H(1; 2), I(4; k), J(7; 8)$ soient alignés

H, I, J sont alignés $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HJ}) = 0$.

On calcule :

$$\overrightarrow{HI} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ k-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ k-2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{HJ} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HJ}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ k-2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times 6 - 6(k-2) = 18 - 6k + 12 = 30 - 6k.$$

On pose $\det(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HJ}) = 0$:

$$30 - 6k = 0 \Leftrightarrow 6k = 30 \Leftrightarrow k = 5.$$

Pour $k = 5$, les points $H, I(4; 5)$ et J sont alignés.

Exercice 4 – Problème de géométrie dans le repère (4 points)

On rappelle les points : $A(0; 0), B(6; 0), C(4; 4), D(2; 4)$.

1. Coordonnées de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ et \overrightarrow{AD}

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} ne sont pas colinéaires

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \times 0 - 2 \times 0 = 0.$$

Hmm, le déterminant est nul : \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} sont en fait **colinéaires** (tous deux horizontaux, composante $y = 0$). Mais ils n'ont pas les mêmes coordonnées ($\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$), donc $AB \parallel DC$ mais $AB \neq DC$ en longueur ($AB = 6, DC = 2$). Le quadrilatère $ABCD$ n'est donc **pas un parallélogramme**.

Vérifions plutôt si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} sont colinéaires :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 6 \times 4 - 2 \times 0 = 24 \neq 0.$$

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ne sont **pas colinéaires** (déterminant = $24 \neq 0$) : les côtés AB et AD ne sont pas parallèles, ce qui confirme que $ABCD$ n'est pas dégénéré.

3. Milieux I de $[AC]$ et J de $[BD]$

$$I = \left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2} \right) = \left(\frac{0 + 4}{2}; \frac{0 + 4}{2} \right) = (2; 2).$$

$$J = \left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2} \right) = \left(\frac{6 + 2}{2}; \frac{0 + 4}{2} \right) = (4; 2).$$

$I(2; 2)$ et $J(4; 2)$.

4. Conclusion sur la nature de $ABCD$

Les milieux des diagonales sont $I(2; 2)$ et $J(4; 2)$: ils sont **distincts**.

Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu commun.

Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ n'ont **pas le même milieu** ($I \neq J$).

Le quadrilatère $ABCD$ **n'est pas un parallélogramme**.

(On peut remarquer que $AB \parallel DC$ car \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} sont colinéaires, mais $AB \neq DC$; $ABCD$ est donc un **trapèze**.)

Fin de la correction